

## 一种接触区可调的曲线圆柱齿轮成形方法与理论验证

张学刚 谢永春 王鹏飞

(攀枝花学院 智能制造学院, 四川 攀枝花 617000)

**摘要** 为了提升曲线圆柱齿轮副的啮合性能,提出了一种可调整齿面接触区的成形方法。首先,制定了调整齿面接触区的基本方案,即,大齿轮采用双刃面铣刀加工,小齿轮凹齿面和凸齿面分别采用半径可调的外刃和内刃面铣刀加工;其次,基于啮合理论,推导了齿轮副的齿面数学模型;然后,基于轮齿接触分析(Tooth contact analysis, TCA),建立了装配误差下齿面接触和传动误差的数学模型;最后,通过8组算例从理论上验证了所提出方案的可行性。研究表明,所提出的成形方法是可行的,调整刀盘曲率半径可形成任意长度接触区的齿轮副,较大的齿面接触区可以提升齿轮的力学性能,但是齿面接触区过大会增加传动误差的敏感性。

**关键词** 曲线圆柱齿轮 可调接触区 成形方法 数学模型 TCA 有限元法

### A Forming Method and Theoretical Verification of Curvilinear Cylindrical Gears for Adjustable Contact Area

Zhang Xuegang Xie Yongchun Wang Pengfei

(School of Intelligent Manufacturing, Panzhihua University, Panzhihua 617000, China)

**Abstract** To improve the contact performance of curvilinear cylindrical gears, a forming method for adjusting the contact area of tooth surfaces is proposed. Firstly, a basic scheme is established for adjusting the contact area of tooth surfaces, which means the large gear is formed by a double-edge face-milling cutter, and the concave and convex surfaces of the pinion are formed by the outer-edge and inner-edge face-milling cutters, respectively. Secondly, mathematical models of the gear pair are deduced based on meshing theory. Then, under assembly errors, mathematical models of contacting and transmission errors are established based on tooth contact analysis (TCA). Finally, the feasibility of the proposed scheme is verified through 8 sets of examples. The research results show that the proposed forming method is feasible. Adjusting the curvature radius of the cutter can form gear pairs with any length of contact area. A larger tooth surface contact area can improve the mechanical properties of the gear. If tooth surface contact area is too large, it will increase the sensitivity of transmission errors.

**Key words** Curvilinear cylindrical gears Adjustable contact area Forming method Mathematical model TCA Finite element method

## 0 引言

曲线圆柱齿轮起源于20世纪初期,在齿轮轴向上,轮齿呈圆弧形,且两侧对称<sup>[1]</sup>,在传动过程中具有润滑性能好、无轴向窜动力等优势<sup>[2]</sup>。齿轮副在啮合过程中,根据齿面的不同接触形式,曲线圆柱齿轮分为点接触和线接触两种,从宏观上较难判断属于哪一种类型,这取决于齿轮副的加工方法。

关于点接触曲线圆柱齿轮,主流的方法是采用

双刃格里森盘形铣刀分别加工相互啮合的两个齿轮,这种方法在很多文献中都介绍过,是迄今为止可行性最强、研究最透彻的一种加工方法<sup>[3-5]</sup>。当然,为了提高加工效率,也有学者研究采用改良的滚齿机来加工点接触曲线圆柱齿轮<sup>[6-8]</sup>。这种齿轮的特点是啮合时齿面接触区域较小,齿面所受压力较大,长时间使用容易出现磨损、点蚀等失效,但是,由装配误差引起的传动误差较小,更符合实际应用<sup>[9]</sup>。

关于线接触曲线圆柱齿轮, 从20世纪80年代开始, 就有学者对其进行研究<sup>[10-13]</sup>。一般采用两套不同的单刃格里森盘形铣刀来加工成形, 其中, 一套单刃铣刀用于加工齿轮副的凹齿面, 另一套单刃铣刀用于加工齿轮副的凸齿面。近年, 也有学者提出采用平行连杆机构<sup>[14-16]</sup>、行星齿轮机构<sup>[17-18]</sup>、设计专用机床<sup>[19-20]</sup>等方式来加工。目前, 这些加工方法中, 只有20世纪末提出的采用单刃盘形铣刀加工最符合实际, 不需要额外设计专用加工装备, 在现有机床和刀具的基础上就可以完成加工。这种齿轮的特点是齿面接触区为一条曲线, 相对点接触齿轮来说, 齿面承受压力较小, 抗齿面失效能力更强; 但是, 这种齿轮装配困难, 对传动误差极其敏感, 不符合实际情况<sup>[21]17-18</sup>。

为了解决点接触曲线齿轮接触区过小, 线接触曲线齿轮接触区过大的问题, 本文中以格里森盘形铣刀为基础, 提出了一种可调整齿面接触区大小的加工方法。采用双刃盘形铣刀加工齿轮副中的大齿轮, 两套不同的单刃盘形铣刀加工齿轮副中的小齿轮。最后, 从齿面几何拓扑、接触印痕和传动误差、力学性能等几个方面验证了这种加工方法的可行性。

### 1 调整齿面接触区的方案

图1所示为利用双刃盘形铣刀所加工出的点接触曲线齿轮在节圆柱表面处的啮合示意图。图1中, 红色区域为大齿轮的轮齿; 蓝色区域为小齿轮的轮齿;  $R_m$ 为双刃盘形铣刀的平均半径;  $\Delta D$ 为假想装配下两轮齿曲线圆心之间的偏距,  $\Delta D = \pi m$ ,  $m$ 为齿轮模数。从图1中可以看出, 两齿轮的轮齿中间位置呈鼓形, 两端有间隙; 轮齿啮合时, 中间区域出现局部点接触。

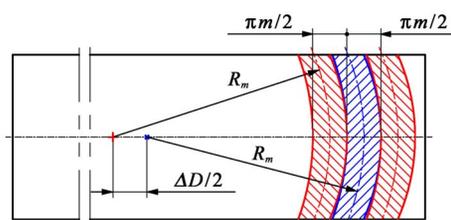


图1 点接触曲线齿轮副啮合示意图

Fig. 1 Schematic of the meshing of point-contact curvilinear gear pair

如果要增大齿面的接触区, 我们可以假设: 适当增加大齿轮(红色)的凸齿面(右侧)的曲率半径, 或者适当减小小齿轮(蓝色)的凹齿面(左侧)的曲率半径。如果要调整其中一个齿轮齿面的曲率半径, 就需要对该齿轮的凹齿面和凸齿面采用两套不同的单刃盘形铣刀独立加工, 也就是说, 加工一对齿轮需要3套不同的刀具: 双刃盘形铣刀加工一个齿轮, 另外两套单刃面铣刀加工另一个配对的齿轮。那么,

如何合理地调整单刃盘形铣刀的曲率半径, 从而达到调整接触区的目的呢?

假设加工大齿轮的双刃盘形铣刀平均曲率半径  $R_m$  已经选定, 那么, 当用于加工小齿轮凸齿面的单刃盘形铣刀曲率半径  $r_{ib} = R_m - \pi m/4$ , 并且, 用于加工小齿轮凹齿面的单刃盘形铣刀曲率半径  $r_{ob} = R_m + \pi m/4$  时, 可加工如图2(a)所示的点接触曲线圆柱齿轮副。当  $r_{ib} = R_m = r_{ob}$  时, 可加工如图2(b)所示的点接触曲线圆柱齿轮副, 相对于图2(a)而言, 齿轮两侧间隙更小, 接触区变得更大。当  $r_{ib} = R_m + \pi m/4$  且  $r_{ob} = R_m - \pi m/4$  时, 可加工如图2(c)所示的线接触曲线圆柱齿轮副, 齿轮两侧无间隙。

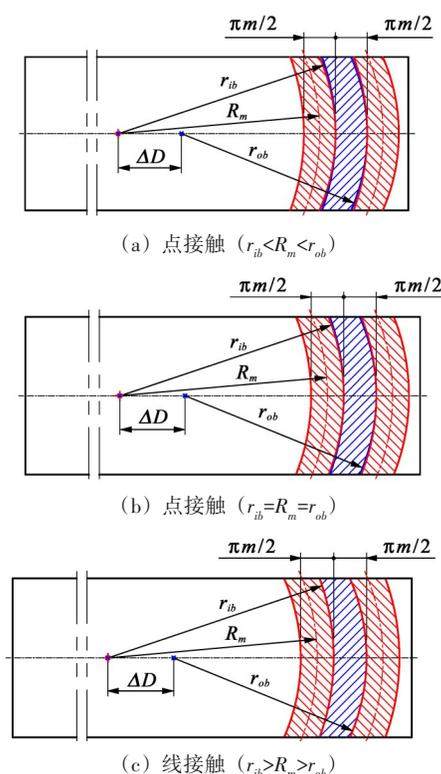


图2 齿轮副接触形式的演变

Fig. 2 Evolution of contact form of gear pairs

我们可以大胆猜测: 若加工大齿轮的刀盘平均曲率半径  $R_m$  已经选定, 那么, 加工小齿轮的刀盘曲率半径满足关系  $R_m - \pi m/4 \leq r_{ib} \leq R_m + \pi m/4$  且  $r_{ob} = 2R_m - r_{ib}$  时, 可加工出任意接触形式的曲线圆柱齿轮副; 随着所选取的  $r_{ib}$  增大, 齿轮两侧的间隙逐渐减小, 所加工出的曲线圆柱齿轮副接触区域逐渐增加, 直到形成线接触曲线圆柱齿轮。

基于以上猜想, 下面利用齿面数学模型、齿面几何拓扑以及轮齿接触分析(Tooth contact analysis, TCA)对其进行验证。

### 2 齿面数学模型

齿面数学模型是建立齿面几何拓扑模型和TCA

的基础。由于推导双刃刀盘加工曲线圆柱齿轮数学模型的相关文献非常多,这里着重推导单刃刀盘加工曲线齿轮的数学模型。

## 2.1 大齿轮的齿面数学模型

采用双刃盘形铣刀加工大齿轮示意图如图3所示。图3中,坐标系 $S_2(O_2-x_2y_2z_2)$ 固定于齿轮毛坯的中心,坐标系 $S_b(O_b-x_by_bz_b)$ 位于刀头中轴线处,坐标系 $S_c(O_c-x_cy_cz_c)$ 位于铣刀旋转中心, $\psi$ 为加工齿轮时的广义转角。

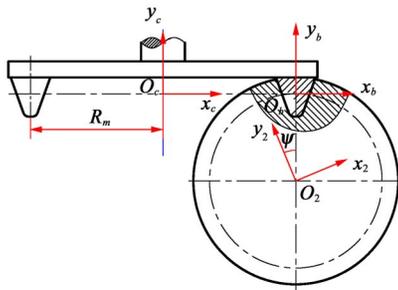


图3 大齿轮加工示意图

Fig. 3 Schematic of the large gear processing

将刀头两侧的刀刃表达在坐标系 $S_b$ 中,有

$$\mathbf{r}_b^i(u_2) = \mathbf{r}_b^o(u_2) = \begin{bmatrix} \pm u_2 \sin \alpha_n \pm \frac{\pi m}{4} \\ u_2 \cos \alpha_n \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, $u_2$ 为刀刃长度变量; $\alpha_n$ 为压力角;上标 $o$ 为加工凹齿面的铣刀外切削刃; $i$ 为加工凸齿面的铣刀内切削刃;下标 $b$ 为所在坐标系。

在坐标系 $S_c$ 中,刀刃构成的产形面为

$$\mathbf{r}_c^k(u_2, \theta_2) = \mathbf{M}_{c,b}(\theta_2) \mathbf{r}_b^k(u_2) \quad (2)$$

式中, $\mathbf{M}_{c,b}$ 为坐标系 $S_b$ 到 $S_c$ 的变换矩阵;参数 $\theta_2$ 为刀盘旋转角度变量;上标 $k=i, j$ 。

将产形面表达在坐标系 $S_2$ 中,有

$$\mathbf{r}_2^k(u_2, \theta_2, \psi_2) = \mathbf{M}_{2,c}(\psi_2) \mathbf{r}_c^k(u_2, \theta_2) \quad (3)$$

式中, $\mathbf{M}_{2,c}$ 为坐标系 $S_c$ 到 $S_2$ 的变换矩阵。

基于经典啮合理论<sup>[22]98-99</sup>,齿面啮合方程的工程解法为

$$f(u_2, \theta_2, \psi_2) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_2^k}{\partial \theta_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2^k}{\partial u_2} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_2^k}{\partial \psi_2} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)中,可求出两参数齿面方程。

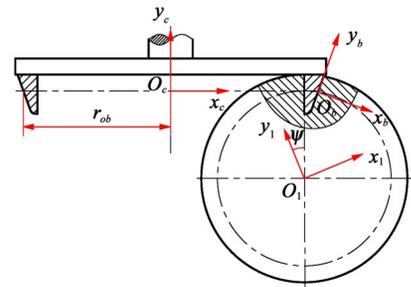
## 2.2 配对小齿轮的齿面数学模型

由于与大齿轮配对的小齿轮采用两套不同的单刃盘形铣刀加工,因此,需要分为两道工序成形。其中,一道工序是用带有外刃的盘形铣刀加工齿轮的凹齿面,如图4(a)所示。图4(a)中, $r_{ob}$ 为外刃刀盘曲率半径;另一道工序是用带有内刃的盘形铣刀加工齿轮的凸齿面,如图4(b)所示。图4(b)中, $r_{ib}$

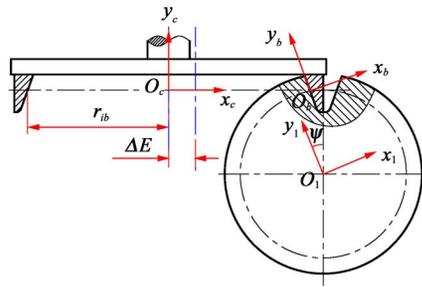
为内刃刀盘曲率半径。加工凸齿面时,刀盘旋转中心需要偏置 $\Delta E$ ,为了保证齿轮副的正常啮合, $\Delta E = \pi m / 2 - (r_{ob} - r_{ib})$ 。

将刀头的外刃和内刃表达在坐标系 $S_b$ 中,有

$$\mathbf{r}_b^i(u_1) = \mathbf{r}_b^o(u_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$



(a) 凹齿面加工



(b) 凸齿面加工

图4 配对小齿轮加工示意图

Fig. 4 Schematic of the matching pinion processing

在坐标系 $S_c$ 中,外刃构成的产形面为

$$\mathbf{r}_c^o(u_1, \theta_1) = \mathbf{M}_{c,b}^o(\theta_1) \mathbf{r}_b^o(u_1) \quad (6)$$

式中,

$$\mathbf{M}_{c,b}^o(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & \sin \alpha_n & 0 & r_{ob} \\ -\sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

在坐标系 $S_c$ 中,内刃构成的产形面为

$$\mathbf{r}_c^i(u_1, \theta_1) = \mathbf{M}_{c,b}^i(\theta_1) \mathbf{r}_b^i(u_1) \quad (8)$$

式中,

$$\mathbf{M}_{c,b}^i(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n & 0 & r_{ib} \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

将外刃产形面表达在坐标系 $S_1$ 中,有

$$\mathbf{r}_1^o(u_1, \theta_1, \psi_1) = \mathbf{M}_{1,c}^o(\psi_1) \mathbf{r}_c^o(u_1, \theta_1) \quad (10)$$

式中,

$$\mathbf{M}_{1,c}^o(\psi_1) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & X_t^o \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & Y_t^o \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$X_t^o = r(\sin \psi - \psi \cos \psi) + r_{ob} \cos \psi$$

$$Y_t^o = r(\cos \psi + \psi \sin \psi) - r_{ob} \sin \psi$$

式中,  $r$ 为待加工齿轮的分度圆半径。

将内刃产形面表达在坐标系  $S_1$  中, 有

$$r_1^i(u_1, \theta_1, \psi_1) = \mathbf{M}_{1,c}^i(\psi_1) r_c^i(u_1, \theta_1) \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_{1,c}^o(\psi_1) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & X_t^i \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & Y_t^i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$X_t^i = r(\sin \psi - \psi \cos \psi) + (r_{ib} - \Delta E) \cos \psi$$

$$Y_t^i = r(\cos \psi + \psi \sin \psi) - (r_{ib} - \Delta E) \sin \psi$$

小齿轮齿面啮合方程的工程解法为

$$f(u_1, \theta_1, \psi_1) = \left( \frac{\partial r_1^k}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial r_1^k}{\partial u_1} \right) \frac{\partial r_1^k}{\partial \psi_1} \quad (14)$$

将式(14)分别代入式(10)、式(12)中, 可求出小齿轮的凹齿面和凸齿面方程。

### 3 轮齿接触分析

轮齿接触分析(TCA)是一项非常成熟的齿轮模拟技术, 主要目的是模拟齿轮副在装配误差下的齿面接触印痕和传动误差。

图5所示为齿轮副装配误差的定义。假设小轮安装于坐标系  $S_1$  上, 大齿轮安装于坐标系  $S_2$  上, 它们的旋转中心与自身的  $Z$  轴重合。图5中, 坐标系  $S_j$  为全局坐标系, 坐标系  $S_k$ 、 $S_l$ 、 $S_m$ 、 $S_n$  均为定义齿轮副装配误差的辅助坐标系, 分别定义两种偏置位移误差  $\Delta C$ 、 $\Delta A$  和两种扭转角度误差  $\Delta H$ 、 $\Delta V$ , 其中,  $\Delta C$  为中心距误差,  $\Delta A$  为轴向误差,  $\Delta H$  为轴扭转误差,  $\Delta V$  为轴交错误差。图5中,  $\phi_p$  和  $\phi_g$  分别为齿轮副啮合过程中小齿轮和大齿轮的转动角度。

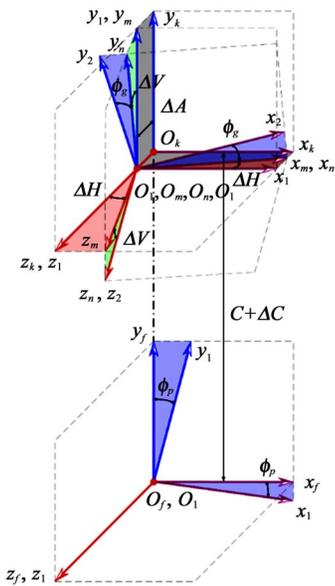


图5 齿轮副装配误差坐标系

Fig. 5 Coordinate systems of assembly errors of the gear pair

小齿轮的凹齿面转换到坐标系  $S_j$  中, 有

$$r_f^o(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{M}_{f,1}(\phi_p) r_1^o(u_1, \theta_1) \quad (15)$$

式中, 矩阵  $\mathbf{M}_{f,1}$  为坐标系  $S_1$  到  $S_j$  的变换。

大齿轮的凸齿面转换到坐标系  $S_j$  中, 有

$$r_f^i(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{M}_{f,n} \mathbf{M}_{n,2}(\phi_g) r_2^i(u_2, \theta_2) \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{M}_{n,2}$  为坐标系  $S_2$  到  $S_n$  的变换;  $\mathbf{M}_{f,n}$  为坐标系  $S_n$  到  $S_j$  的变换, 即

$$\mathbf{M}_{f,n} = \mathbf{M}_{f,k} \mathbf{M}_{k,l} \mathbf{M}_{l,m} \mathbf{M}_{m,n} \quad (17)$$

齿面接触点位置的求解, 实质是两齿面的位置矢量相等, 同时齿面单位法向量也相等, 即

$$\begin{cases} r_f^o(u_1, \theta_1, \phi_p) = r_f^i(u_2, \theta_2, \phi_g) \\ \mathbf{n}_f^o(u_1, \theta_1, \phi_p) = \mathbf{n}_f^i(u_2, \theta_2, \phi_g) \end{cases} \quad (18)$$

式中,  $\mathbf{n}_f^o$  和  $\mathbf{n}_f^i$  分别为小齿轮凹齿面和大齿轮凸齿面单位法向量。

式(18)中有6个未知参数, 5个独立方程; 若给定小齿轮的转角  $\phi_p$ , 可以求解出大齿轮的转角  $\phi_g$ 。那么, 齿轮的传动误差为

$$\Delta \phi = \frac{z_p}{z_g} \phi_p - \phi_g \quad (19)$$

式中,  $z_p$  和  $z_g$  分别为小齿轮和大齿轮的齿数。

齿面接触印痕(接触椭圆)可根据齿面接触点局部的曲率求解, 具体方法可参考文献[22]<sup>241-249</sup>。

### 4 算例分析

为了验证本文中所提及方法的可行性, 以表1中的参数作为算例的基本参数, 分别探讨单刃刀盘半径调整对齿面几何偏差、接触印痕、传动误差的影响。

表1 齿轮副基本参数

Tab. 1 Basic parameters of the gear pair

参数名称	数值	参数名称	数值
齿数 $z$	31(小)/40(大)	齿根高系数 $b$	1.25
模数 $m/\text{mm}$	4	齿宽 $w/\text{mm}$	30
法向压力角 $\alpha_n/(\circ)$	20	刀尖圆角系数 $\rho$	0.25
齿顶高系数 $a$	1		

本文中总共设置了8组算例, 每组算例的值都是基于第1节中的猜想而定(表2)。表2中, 双刃刀盘平均半径恒定不变, 外刃刀盘半径由大到小, 内刃刀盘半径和偏置距离由小到大。

表2 加工齿轮副的刀盘曲率半径

Tab. 2 Curvature radius of cutter head for machining gear pair

算例	$R_m/\text{mm}$	$r_{ob}/\text{mm}$	$r_{ib}/\text{mm}$	$\Delta E/\text{mm}$
1	60	63.141 6	56.858 4	0
2	60	61.570 8	58.429 2	3.141 6
3	60	60.224 4	59.775 6	5.834 4
4	60	59.102 4	60.897 6	8.078 4

续表

算例	$R_m$ /mm	$r_{ob}$ /mm	$r_{ib}$ /mm	$\Delta E$ /mm
5	60	58.204 8	61.795 2	9.873 6
6	60	57.531 6	62.468 4	11.211 0
7	60	57.082 8	62.917 2	12.117 6
8	60	56.858 4	63.141 6	12.566 4

#### 4.1 单刃刀盘半径对齿面几何的影响

为了验证单刃刀盘曲率半径是否可以改善齿面几何形态,这里将双刃刀盘和单刃刀盘所成形的齿面进行对比。

基于表1、表2中的数据,半径为60 mm的双刃刀盘与对应半径的单刃刀盘所加工的小齿轮凹齿面几何拓扑偏差如图6所示。

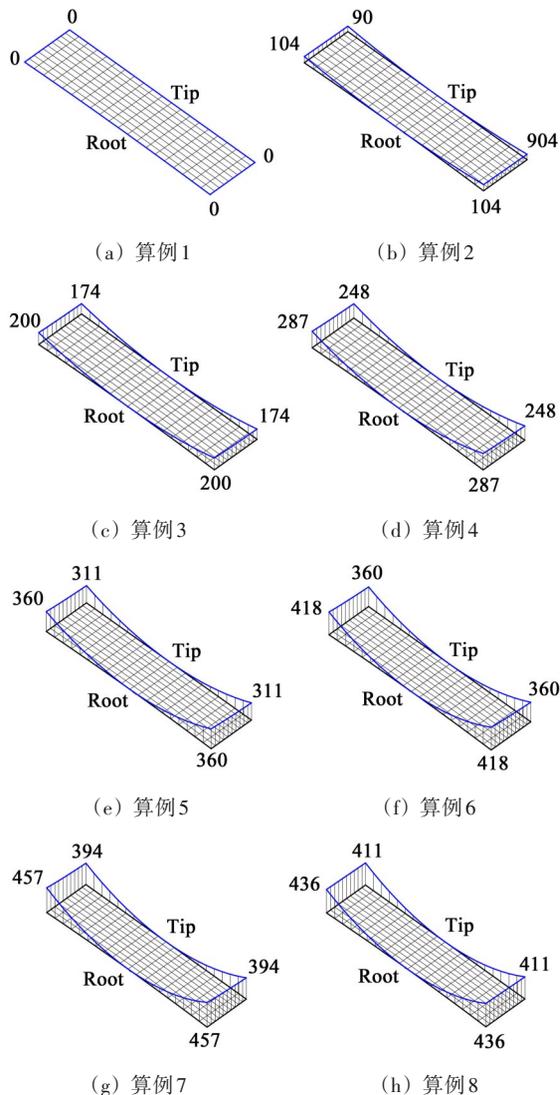


图6 小齿轮凹齿面几何拓扑偏差( $\mu\text{m}$ )

Fig. 6 Geometric topology deviation of the concave tooth surface of the pinion ( $\mu\text{m}$ )

从图6中可以看出,随着 $r_{ob}$ 减小、 $r_{ib}$ 增大,小齿轮凹齿面两端的偏差逐渐增大,即采用单刃刀盘加工的齿轮两端逐渐增厚,这说明采用单刃刀盘加

工可以起到调整轮齿几何结构的作用。其中,算例1中的齿面几何偏差为0,说明当 $r_{ob}=R_m+\pi m/4$ 、 $r_{ib}=R_m-\pi m/4$ 时,采用单刃刀盘加工和双刃刀盘加工是等效的。

#### 4.2 单刃刀盘半径对齿面接触区的影响

齿面接触印痕分析可以直观观察齿轮副在啮合过程中接触区的大小与位置。图7所示为无装配误差下小齿轮凹齿面在啮合过程中的接触印痕。从图7中可以看出,随着 $r_{ob}$ 减小, $r_{ib}$ 增大,小齿轮齿面的接触区逐渐扩大,直到出现图7(h)所示的齿面线接触。也就是说,当 $r_{ob}=R_m-\pi m/4$ 、 $r_{ib}=R_m+\pi m/4$ 时,可加工出线接触曲线圆柱齿轮副,与第1节中我们的猜想一致。

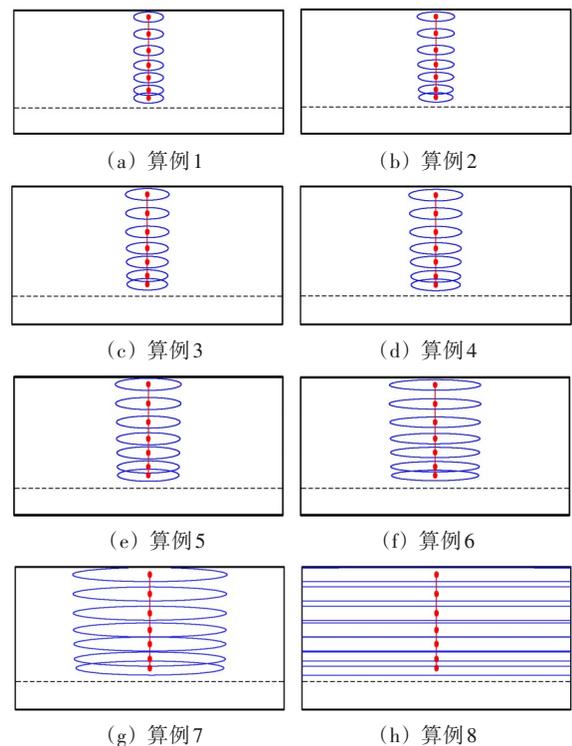


图7 无装配误差情况下小齿轮凹齿面接触印痕

Fig. 7 Contact pattern of concave tooth surface of the pinion without assembly error

#### 4.3 单刃刀盘半径对传动误差的影响

由于没有对齿面修型,本文中所提及齿轮的传动误差是线性的,取线性传动误差的幅值作为考查对象。此外,将每一组算例设置4种传动误差分别为 $\Delta V=0.2^\circ$ 、 $\Delta H=0.2^\circ$ 、 $\Delta A=0.5\text{ mm}$ 、 $\Delta C=0.5\text{ mm}$ ,从而研究单刃刀盘曲率半径的变化对传动误差的影响,如图8所示。由图8中可知,在存在中心距误差 $\Delta C$ 条件下,刀盘曲率半径的变化对齿轮副传动误差无影响,且传动误差为0;在另外3种装配误差条件下,随着 $r_{ob}$ 减小, $r_{ib}$ 增大,传动误差幅值变大,从算例5开始,传动误差幅值陡然增加,说明当 $r_{ob}>61.795\text{ 2 mm}$ 时,随着接触区的增加会提高传动误差的敏感性。

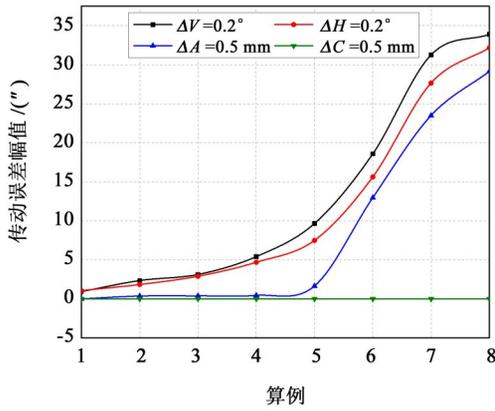


图8 不同装配误差下传动误差幅值

Fig. 8 Amplitude of transmission errors under different assembly errors

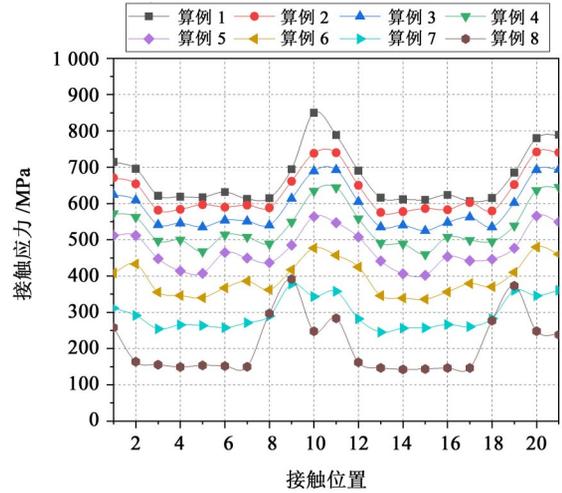
### 4.4 单刃刀盘半径对接触应力的影响

下面通过有限元法对以上算例的接触性能进行研究, 验证齿面的接触印痕与应力随刀盘半径的变化规律。

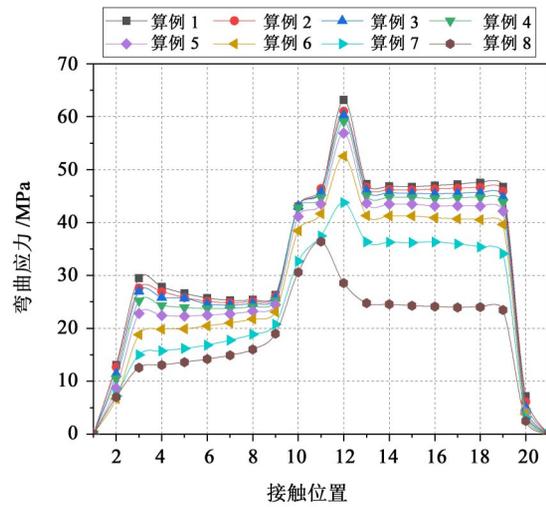
本文中齿轮副有限元模型的边界条件、网格划分方法等参见文献[21]<sup>3-16</sup>, 齿轮材料属性: 弹性模量为 210 000 MPa, 泊松比为 0.3, 阻力矩为 150 N·m, 单元和节点数分别为 208 642 和 1 022 970。

图9所示为小齿轮在两个啮合周期内的 Mises 接触和弯曲应力分布情况。由图9(a)中可以看出, 随着  $r_{ob}$  减小,  $r_{ib}$  增大, 齿面接触应力减小, 这是由于齿面接触区增大所致。从图10所示的3个典型算例可以看出, 齿面的接触区是逐渐增加的, 与第4.2节中的描述一致。对于算例1~算例6, 整个啮合周期中, 最大接触应力出现在接触位置10, 这是由于齿轮啮合到位置10齿轮的齿顶出现棱接触, 使接触应力激增, 如图10(a)所示。对于算例7、算例8, 最大接触应力出现在接触位置9, 此时出现齿顶棱接触, 如图10(b)所示, 由于这两个算例的接触区印痕较长, 所以齿顶有两处棱接触。从图9(a)中算例1和算例8的接触应力曲线对比可以发现, 极限点接触(算例1)的接触应力大约是线接触(算例8)的4倍。

图9(b)所示为8个算例的齿根弯曲应力, 由图9(b)中可知, 齿根弯曲应力的演变规律和接触应力类似, 随着  $r_{ob}$  减小和  $r_{ib}$  增大, 弯曲应力逐渐减小。在1个啮合周期中, 算例8的齿根最大弯曲应力发生在接触位置11, 对应的应力云如图10(c)所示, 当下一个轮齿进入啮合时, 存在最大弯曲应力; 算例1~算例7的最大弯曲应力同样发生在下一个轮齿进入啮合的时候, 这里不再展示应力云图。在接触位置10处的弯曲应力出现了一次激增, 这是由于齿轮的啮合从双齿接触逐渐进入单齿接触状态, 齿面载荷增加, 导致齿根弯曲应力增加。



(a) 齿面最大接触应力

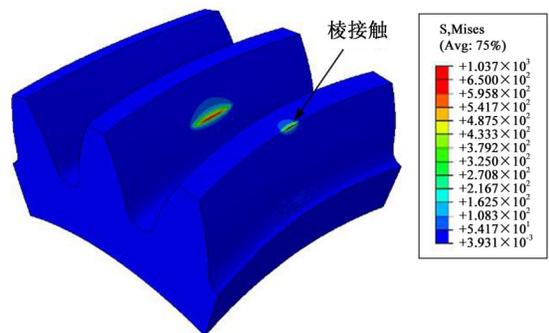


(b) 齿根弯曲应力

图9 小齿轮积分点最大Mises应力

Fig. 9 Maximum Mises stresses at the integration point on the pinion

对于点接触的曲线齿轮来说, 齿根弯曲应力主要集中在齿轮的中间部位, 这一点可以从图10(b)中明显看出来; 对于线接触曲线齿轮来说, 齿根弯曲应力主要分布于齿轮两端附近, 如图10(c)所示, 此外, 线接触齿轮的弯曲应力在齿轮宽度方向上分布相对更均匀, 因此, 接触区更长的曲线齿轮可以起到降低弯曲应力的作用。



(a) 算例1: 接触位置10

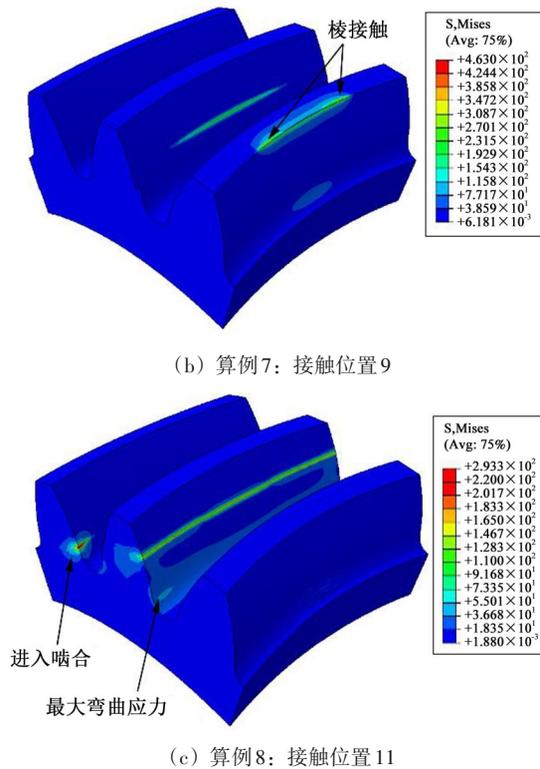


图10 小齿轮节点 Mises 应力云图

Fig. 10 Mises stress contour at the node on the pinion

## 5 结论

提出了一种通过调整单刃刀盘半径的方式来调整接触区大小，并通过一系列算例对方案进行验证分析。经分析，得出如下结论：

(1) 采用双刃盘形铣刀加工齿轮副的一个齿轮，两套单刃盘形铣刀分别加工另一个配对齿轮的凹齿面和凸齿面，通过对单刃盘形铣刀曲率半径的调整可达到改变接触区大小的目的。

(2) 当两套单刃刀盘曲率半径  $r_{ob}=R_m+\pi m/4$ 、 $r_{ib}=R_m-\pi m/4$  时，采用单刃刀盘与曲率半径为  $R_m$  的双刃刀盘加工是等效的，可加工出接触区大小完全相同的点接触曲线圆柱齿轮，齿根弯曲应力主要位于轮齿中间部位；当两套单刃刀盘曲率半径  $r_{ob}=R_m-\pi m/4$ 、 $r_{ib}=R_m+\pi m/4$  时，可加工出线接触曲线圆柱齿轮副，齿根弯曲应力主要位于轮齿两端。

(3) 随着外刃刀盘曲率半径  $r_{ib}$  增大，齿面的接触区逐渐增加，但是， $r_{ib}$  选择过大，传动误差的敏感性将会增加。

(4) 增加齿面接触区，可以起到降低齿面接触应力和齿根弯曲应力的效果，提升传统点接触曲线齿轮的力学性能。

## 参 考 文 献

[1] 张学刚,梁政.弧齿圆柱齿轮研究现状综述[J].机械传动,2020,

44(7):140-150.

ZHANG Xuegang, LIANG Zheng. Review on research status of curvilinear cylindrical gear [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(7): 140-150.

- [2] FUENTES A, RUIZ-ORZAEZ R, GONZALEZ-PEREZ I. Computerized design, simulation of meshing, and finite element analysis of two types of geometry of curvilinear cylindrical gears [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 272: 321-339.
- [3] LIU S. Curvilinear cylindrical gears [J]. Gear Technology, 1988, 5(3): 8-12.
- [4] TSENG R J, TSAY C B. Mathematical model and undercutting of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(11): 1189-1202.
- [5] TSENG R J, TSAY C B. Contact characteristics of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth [J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(9): 905-919.
- [6] TSENG R J, TSAY C B. Mathematical model and surface deviation of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth cut by a hob cutter [J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(5): 982-987.
- [7] TSENG R J, TSAY C B. Undercutting and contact characteristics of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth generated by hobbing [J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(3): 634-643.
- [8] 戴玉堂, 有贺幸则, 姜德生. 圆弧齿线圆柱齿轮的数控滚切机理与试验研究 [J]. 中国机械工程, 2006, 17(7): 706-709.
- DAI Yutang, ARIGA Yukinori, JIANG Desheng. Hobbing mechanism of cylindrical gear with arcuate tooth traces and experimental investigation [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(7): 706-709.
- [9] FUENTES-AZNAR A, RUIZ-ORZAEZ R, GONZALEZ-PEREZ I. Comparison of spur, helical and curvilinear gear drives by means of stress and tooth contact analyses [J]. Meccanica, 2017, 52(7): 1721-1738.
- [10] 李瑛, 赵学镛. 线接触圆弧齿线圆柱齿轮齿根应力计算 [J]. 太原机械学院学报, 1990(4): 62-69.
- LI Ying, ZHAO Xueyong. Calculation of bending stress of line contact circular-arc-tooth-trace gear [J]. Journal of Taiyuan Institute of Machinery, 1990(4): 62-69.
- [11] 李瑛, 施益洪. 线接触圆弧齿线圆柱齿轮齿面接触变形对齿根应力的影响 [J]. 太原机械学院学报, 1992(1): 54-57.
- LI Ying, SHI Yihong. The effects of contact deformation of line-contact circular-arc-tooth-trace gear on the bending stress in the fillets [J]. Journal of Taiyuan Institute of Machinery, 1992(1): 54-57.
- [12] 李瑛, 赵学镛. 线接触圆弧齿线圆柱齿轮齿根应力的试验研究 [J]. 太原机械学院学报, 1992(2): 209-213.
- LI Ying, ZHAO Xueyong. Experimental study on bending stress of line-contact circular-arc-tooth-trace gear [J]. Journal of Taiyuan Institute of Machinery, 1992(2): 209-213.
- [13] 赵学镛. 圆弧齿线圆柱齿轮的设计和轮齿特点 [J]. 太原机械学院学报, 1986, 4(4): 27-32.
- ZHAO Xueyong. The design of the cylindrical gear with arc tooth-line and tooth characters [J]. Journal of Taiyuan Institute of Machinery, 1986, 4(4): 27-32.

(下转第69页)